

Corrigé

$$\begin{aligned}
 1) \quad (A+I)(2I-A) &= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -a & a^2 \\ -\frac{1}{a} & 2 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

2) D'après 1), $(A+I)(2I-A)=0$
 ce qui équivaut à

$$\begin{aligned}
 2AI - A^2 + 2I^2 - IA &= 0 \\
 2A - A^2 + 2I - A &= 0 \\
 2I &= A^2 - A \\
 I &= \frac{1}{2} (A-I)A
 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (A-I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{2} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 2a) \quad B+C &= \frac{1}{3}(A+I) + \frac{1}{3}(2I-A) \\
 &= \frac{1}{3}(A+I+2I-A) = \frac{1}{3} 3I = I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2B-C &= 2 \cdot \frac{1}{3}(A+I) - \frac{1}{3}(2I-A) \\
 &= \frac{1}{3}(2A+2I-2I+A) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 3A = A
 \end{aligned}$$

$$2b) \quad B = \frac{1}{3}(A+I) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } B^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3a & 3a^2 \\ \frac{3}{a} & 3 & 3a \\ \frac{3}{a^2} & \frac{3}{a} & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} = B$$

De plus, d'après la)

$$\begin{aligned} BC &= \frac{1}{3} (A+I) \frac{1}{3} (2I-A) \\ &= \frac{1}{9} (A+I) (2I-A) \\ &= \frac{1}{9} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et de même $CB = 0$

Ainsi, $A^{n+1} = 2^{n+1} B + (-1)^{n+1} C$

* D'après le principe de récurrence,

$$A^n = 2^n B + (-1)^n C$$

pour tout entier naturel n .

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -a & -a^2 \\ -\frac{1}{a} & 2 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}$$

et comme précédemment, on montre $C^2 = C$.

3) * Vérifions la proposition au rang $n=0$.

$$\begin{aligned} 2^0 B + (-1)^0 C &= 1 \cdot B + 1 \cdot C \\ &= B + C \\ &= I \\ &= A^0. \end{aligned}$$

* Supposons $A^n = 2^n B + (-1)^n C$
pour un entier naturel n fixé,
et montrons qu'alors $A^{n+1} = 2^{n+1} B + (-1)^{n+1} C$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (2^n B + (-1)^n C) A \\ &= (2^n B + (-1)^n C) (2B - C) \\ &= 2^{n+1} B^2 - 2^n BC + 2(-1)^n CB - (-1)^n C^2 \\ &= 2^{n+1} B - 2^n BC + 2(-1)^n CB + (-1)^{n+1} C \end{aligned}$$